الموضوع الثاني

التمرين الأوّل: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

نعتبر النقط $A(1;1;0)$ ، $B(-1;2;-3)$ ، $C(0;5;2)$ ، $D(4;7;0)$.

1) بيّن أن النقط A ، B و C تعين مستو.

2) أ) أثبت أنّ المستقيم (CD) عمودي على كل من المستقيمين (AB) و (AC).

ب) جد معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)، ثم احسب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC).

3) أ) حدّد طبيعة المثلث ABC.

ب) احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي k ، $4^{5k}\equiv 1[11]$.

2) استنتج تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11.

3) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $\left(1+3\times 1438^{10n}+2\times 2017^{5n+3}\right)$ يقبل القسمة على 11.

4) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $\left(-3+n+2\times 2017^{5n+2}\right)$ قابلا للقسمة على 11.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

نعتبر النقط A ، B ، C و D التي لواحقها : $z_A=1+i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=\frac{1}{2}(1-i)$ و $z_D=\overline{z_C}$.

1) أ) اكتب z_A و z_C على الشكل الأسي ثم استنتج الشكل الأسي للعددين z_B و z_D.

ب) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي تحقق: $(z_A)^n=(z_B)^n$.

2) أ) اوجد نسبة ومركز التحاكي h الذي يحول D إلى A ويحول C إلى B.

ب) احسب طويلة العدد المركب $\frac{z_C-z_B}{z_D-z_A}$ ثمّ استنتج طبيعة الرباعي $ADCB$.

3) جد z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\left\{(A;2),(B;2),(C;-1),(D;-1)\right\}$.

4) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي بحيث: $\left\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\right\|=\sqrt{5}$.

بيّن أنّ A نقطة من (Γ)، ثم حدد طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميزة وأنشئها.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=x^3+6x+12$.

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in\left]-1{,}48;-1{,}47\right[$ ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^3-6}{x^2+2}$

وليكن $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) بيّن أنّ من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=\dfrac{x\,g(x)}{\left(x^2+2\right)^2}$ ،

ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكّل جدول تغيراتها.

2) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى $\left(C_f\right)$.

ب) ادرس وضعية المنحنى $\left(C_f\right)$ بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

3) بيّن أنّ $f(\alpha)=\dfrac{3}{2}\alpha$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

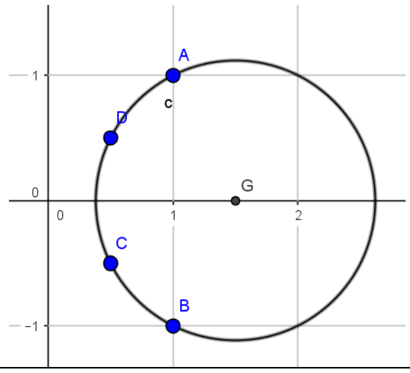
4) ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى $\left(C_f\right)$.

5) نرمز بـ S الى مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني $\left(C_f\right)$ والمستقيمات التي معادلاتها $x=\alpha$ ، $x=0$ و $y=0$.

أثبت أنّ: من أجل كل $x\in[\alpha;0]$ ، $-3\le f(x)\le f(\alpha)$ ثم بيّن أنّ : $\dfrac{3}{2}\alpha^2\le S\le -3\alpha$.

انتهى الموضوع الثاني

عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
الموضــــــــــــــــوع الثاني		
التمرين الأوّل: (04 نقاط)		
1) اثبات أن النقط A ، B و C تعين مستو	0.75	0.75
2) أ) $\begin{cases}(CD)\perp(AB)\\(CD)\perp(AC)\end{cases}$ يكفي اثبات $\begin{cases}\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB}=0\\\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$	0.50	1.75
ب) معادلة المستوي $(ABC): 2x+y-z-3=0$ حساب المسافة $d(D;(ABC))=2\sqrt{6}$	0.75 0.50	
3) أ) المثلث ABC قائم في النقطة A لأن $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$	0.50	1.50
ب) حجم رباعي الوجوه $ABCD$: $V_{ABCD}=14\,u.v$.	01	
التمرين الثاني: (04 نقاط)		
1) اثبات ان: من أجل كل عدد طبيعي k ، $4^{5k}\equiv 1[11]$.	01	01
2) الاستنتاج $4^{5k}\equiv 1[11]\ ;\ 4^{5k+1}\equiv 4[11]\ ;\ 4^{5k+2}\equiv 5[11]4^{5k+3}\equiv 9[11]\ ;\ 4^{5k+4}\equiv 3[11]$	01	01
3) اثبات أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $\left(2\times 2017^{5n+3}+3\times 1438^{10n}+1\right)\equiv 0[11]$	01	01
4) $\left(2\times 2017^{5n+2}+n-3\right)\equiv 0[11]$ معناه $n=11k+6\ \ /\ k\in\mathbb{N}$	01	01
التمرين الثالث: (05 نقاط)		
1) أ) اكتب $z_A=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ و $z_C=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ استنتاج الشكل الأسي $z_B=\overline{z}_A=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ و $z_D=\overline{z}_C=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.	2×0.25 2×0.25	1.50
ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق: $(z_A)^n=(z_B)^n$. $(z_A)^n=(z_B)^n$ معناه $n=4k\ \ /\ k\in\mathbb{N}$	0.50	
2) أ) مركز التحاكي h هو O ونسبته 2	0.50	1.50
ب) $\left\|\frac{z_C-z_B}{z_D-z_A}\right\|=1$ **الرباعي** $ADCB$ شبه منحرف متساوي الساقين لأن $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}\\BC=AD\end{cases}$	0.25 0.75	
3) $z_G=\frac{3}{2}$	0.50	0.50

عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
4) $A\in(\Gamma)$ لأن $2(z_B-z_A)-(z_C-z_A)-(z_D-z_A)=1-2i$ المجموعة (Γ) هي مجموعة نقط دائرة مركزها G ونصف قطرها $\frac{\sqrt{5}}{2}$ انشاء (Γ)  	0.50 0.50 0.50	1.50
التمرين الرابع: (07 نقاط)		
I) 1) دراسة اتجاه التغير : g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $g'(x)=3x^2+6$ g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ لأن $3x^2+6>0$	0.25 0.25	0.50
2) اثبات أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in]-1,48;-1,47[$ إشارة $g(x)$ $\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & \alpha & & +\infty \\ \hline g(x) & & - & 0 & + & \end{array}$	0.50 0.50	01
II) 1) أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.	0.50	1.75
ب) تبيان أن: من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=\frac{x\,g(x)}{(x^2+2)^2}$ اتجاه تغير الدالة: $\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & \alpha & & 0 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & 0 & - & 0 & + & \end{array}$ الدالة f متناقصة تماما على $[\alpha;0]$ ومتزايدة تماما على المجالين $]-\infty;\alpha]$ و $[0;+\infty[$	0.50 0.25	

<table>
<tr><th rowspan="2">عناصر الإجابة</th><th colspan="2">العلامة</th></tr>
<tr><th>مجزأة</th><th>المجموع</th></tr>
<tr><td>

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

</td><td>0.50</td><td></td></tr>
<tr><td>

2) أ) $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{-2(x+3)}{x^2+2}=0$

</td><td>0.50</td><td rowspan="2">01</td></tr>
<tr><td>

ب) الوضع النسبي للمنحني $\left(C_f\right)$ بالنسبة الى (Δ)

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	

$\left(C_f\right)$ فوق (Δ) لما $x\in\left]-\infty;-3\right[$

$\left(C_f\right)$ تحت (Δ) لما $x\in\left]-3;+\infty\right[$

$\left(C_f\right)\cap(\Delta)=\{\mathrm{I}(-3;-3)\}$

</td><td>0.50</td></tr>
<tr><td>

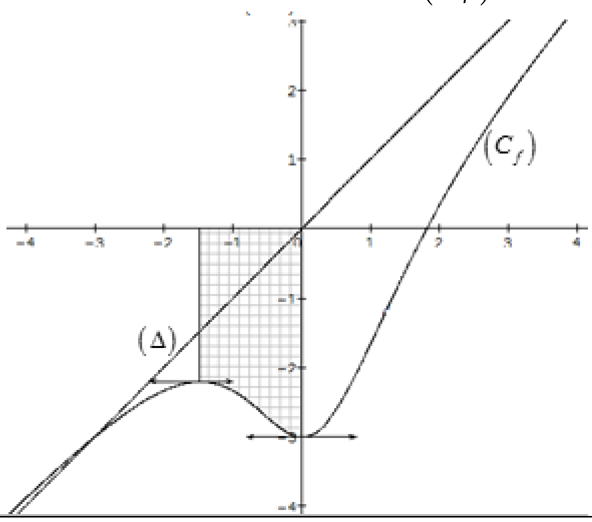
3) بيان أنّ $f(\alpha)=\dfrac{3}{2}\alpha$

استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

$-2,22<f(\alpha)<-2,21$

</td><td>0.50
0.50</td><td>01</td></tr>
<tr><td>

4) رسم المستقيم (Δ) والمنحنى $\left(C_f\right)$.



</td><td>0.25
0.50</td><td>0.75</td></tr>
<tr><td>

5) اثبات أنّ: من أجل كل $x\in[\alpha;0]$ ، $-3\leq f(x)\leq f(\alpha)$ ثم بيان أنّ : $\dfrac{3}{2}\alpha^2\leq S\leq-3\alpha$.

من جدول تغيرات الدالة f

</td><td>0.25</td><td></td></tr>
</table>

عناصر الإجابة	العلامة	
	مجزأة	المجموع
إذا كان $\alpha \le x \le 0$ فان $f(0) \le f(x) \le f(\alpha)$ $-\int_{\alpha}^{0} f(\alpha)dx \le -\int_{\alpha}^{0} f(x)dx \le -\int_{\alpha}^{0} (-3)dx$ معناه $\frac{3}{2}\alpha^2 \le S \le -3\alpha$	0.75	01